Nekonečné číselné řady – výběr příkladů

1. Pokuste se sečíst řadu nebo ukažte, že řada diverguje:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$, existuje-li $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \in R$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ ($= \sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(\frac{n+1}{n})$);

   b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^{n+1}}{6^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-3n}$.

2. Ukažte užitím nutné podmínky konvergence řad, že divergují řady:

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^2$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$ nebo $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$.

3. Rozhodněte o konvergenci , resp. divergenci, řady (užijte vhodné kriterium) :

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{2n^2+3}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)^2$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2n^2+3}$; $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n^2-1}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2n-1}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^2+3}$;

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{n^2+1}\right)^2$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\exp(\frac{1}{n})$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$;

   b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n\cdot\sqrt{n}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n+1}\right)^n$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^n$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{4^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{e^{2n}n!}$;

   c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n}$; $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^2 n}$;

   d) Pro jaká a >0 konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$?

4. Vyšetřete absolutní, případně neabsolutní konvergenci řady:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$;

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n^2}$;

   b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$.

5. V závislosti na parametru $x \in R$ vyšetřete, zda konverguje absolutně, resp. konverguje neabsolutně, resp. diverguje řada

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 3^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}(x-1)^n$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}(x+2)^n$;

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n}{n^2+1}(x+1)^n$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{2^n(n+1)}(x-3)^n$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}(x-2)^n$.